Première EMD de topologie 2ième année (2016/2017)

Exercice 1 *: Montrer que sur un ensemble* <u>*fini à deux éléments*</u>*, il n'existe que quatre topologies. Indiquer, en justifiant, celles qui sont séparées.*

Exercice 2 *: Soit* $E = \{a, b, c, d, e\}$ *et* $\mathcal{T} = \{E, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, e\}\}$.

1. *Vérifier que* $\mathcal{T}$ *est bien une topologie sur* E *dont on déterminera la famille des fermés.*
2. *Vérifier que le singleton* $\{a\}$ *est une partie partout dense. En déduire qu'une partie de* E *est partout dense, si et seulement si elle contient* a*. Combien y a-t-il de parties partout dense ? (on ne demande pas d'en dresser la liste).*
3. *On considère la partie* $A = \{c, e\}$*. Déterminer* $\bar{A}$, $\mathring{A}$ *et en déduire* $Fr(A)$, $Ext(A)$ *et* A'.
4. *Identifier la topologie* $\mathcal{T}_A$ *induite par* $\mathcal{T}$ *sur* A.
5. *On considère la partie* $B = \{a, d\}$*. Calculer* $\overset{\circ}{\overbrace{\bar{B}}}$ *et* $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$*. Que Concluez-vous ? Calculer* $\bar{B}$ *et* $\overline{A \cap B}$*. Conclusion ?*

Exercice 3 *: on munit* $\mathbb{R}$ *de sa topologie usuelle notée* $\mathcal{T}_u$.

1. *Rappeler la définition d'un ouvert de* $\mathbb{R}$.
2. $[0,1[$ *est-il un ouvert de* $\mathbb{R}$ *? Un fermé ? Justifier.*
3. *Calculer* $\overline{[0,1[}$ *et* $\overset{\circ}{\overbrace{[0,1[}}$*. En déduire* $Fr([0,1[)$ *et* $Ext([0,1[)$.

Exercice 4 *: On considère la famille* $\mathcal{T}$ *de parties de* $\mathbb{N}$ *définie par :*

$$\mathcal{T} = \{E_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\} \text{ où } E_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}.$$

1. *Vérifier que* $\mathcal{T}$ *est une topologie sur* $\mathbb{N}$ *totalement ordonnée par inclusion, c'est-à-dire que* $\forall\, \mathcal{O}, \mathcal{Q} \in \mathcal{T}$*, on a ou bien* $\mathcal{O} \subset \mathcal{Q}$ *ou bien* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{O}$*. En déduire que* $\mathcal{T}$ *est non séparée.*
2. *On note par* $\mathcal{T}_d$ *la topologie discrète sur* $\mathbb{N}$*. Déduire de la question 1, que l'application identité* $id_{\mathbb{N}}: (\mathbb{N}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{N}, \mathcal{T}_d)$ *n'est pas continue.*

Exercice 5 *: Donner une définition de la connexité. L'espace topologique défini dans l'exercice 2 est-il connexe ? Justifier.*

Good luck !

Corrigé de la première EMD topologie

***Exercice 1** : Soit $E = \{a, b\}$ un ensemble à deux éléments et soit $\mathcal{T}$ une topologie sur E, alors si l'on désigne par $\mathcal{T}_G$ et par $\mathcal{T}_D$ respectivement la topologie grossière et discrète, nous avons la double inclusion : $\{\emptyset, E\} = \mathcal{T}_G \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_D = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b\}\}$. D'où nécessairement, si $\mathcal{T} \neq \mathcal{T}_G$ et $\mathcal{T}_D$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}\}$ ou $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{b\}\}$. Or on vérifie immédiatement que ces deux dernières familles constituent bien des topologies sur E. En résumé, il existe bien quatre topologies sur un ensemble à deux éléments. Seule la discrète est séparée. Pour la grossière, ça été vu en cours. Vérifions par exemple $\mathcal{T} = \{\emptyset, E, \{a\}\}$ est non séparée : $a \neq b$ et <u>l'unique ouvert contenant</u> b est E de sorte que pour tout ouvert $\mathcal{O}$ contenant a, $\mathcal{O} \cap E = \mathcal{O} \neq \emptyset$.*

***Exercice 2** : Comme $\mathcal{T}$ <u>est finie</u>, la famille $\mathcal{T}$ définira une topologie si et seulement si elle <u>stable par union et intersection</u>, c'est-à-dire si $\forall\, \mathcal{O}, \mathcal{Q} \in \mathcal{T}$: $\mathcal{O} \cap \mathcal{Q}$ et $\mathcal{O} \cup \mathcal{Q}$ appartiennent à $\mathcal{T}$, et pour le vérifier, le mieux serait de dresser deux tableaux à double entrées que l'on ne remplira qu'à demi, vu la commutativité et l'idempotence des opérations UNION et INTERSECTION.*

$\cup$	E	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$	$\{a,b,e\}$
E							
$\emptyset$	E						
$\{a\}$	E	$\{a\}$					
$\{a,b\}$	E	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$				
$\{a,c,d\}$	E	$\{a,c,d\}$	$\{a,c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$			
$\{a,b,c,d\}$	E	$\{a,b,c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$		
$\{a,b,e\}$	E	$\{a,b,e\}$	$\{a,b,e\}$	$\{a,b,e\}$	E	E	

$\cap$	E	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$	$\{a,b,e\}$
E							
$\emptyset$	$\emptyset$						
$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$					
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\emptyset$	$\{a\}$				
$\{a,c,d\}$	$\{a,c,d\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a\}$			
$\{a,b,c,d\}$	$\{a,b,c,d\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c,d\}$		
$\{a,b,e\}$	$\{a,b,e\}$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	

Conclusion : $\mathcal{T}$ *est bien une topologie sur* E.

La famille des fermés s'obtient en prenant les complémentaires des ouverts. Si l'on désigne par $\mathcal{F}$ *la famille des fermés de E a, alors* $\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{\mathcal{O}^c, \mathcal{O} \in \mathcal{T}\}$, *donc :*

$$\mathcal{F} = \big\{E, \emptyset, \{b,c,d,e\}, \{c,d,e\}, \{b,e\}, \{e\}, \{c,d\}\big\}$$

Le singleton $\{a\}$ *est une partie partout dense si et seulement si, elle rencontre tout ouvert non vide, c'est-à-dire si et seulement si tout ouvert non vide contient* a, *ce qui est bien exact. Donc* $\overline{\{a\}} = E$. *Soit* D *une partie partout dense de* E, *elle rencontre donc tout ouvert non vide, or* $\{a\}$ *est un ouvert de* E *donc* $D \cap \{a\} \neq \emptyset$, *i.e.* $a \in D$. *Inversement, soit* D *une partie de* E *contenant* a, *c'est-à-dire* $\{a\} \subset D$ *d'où l'on tire l'inclusion* $E = \overline{\{a\}} \subset \overline{D}$ *c'est-à-dire* $\overline{D} = E$ *et* D *est partout dense.*

D'après ce qui précède, une partie D *partout dense est de la forme* $D = A \cup \{a\}$ *où* A *désigne une partie quelconque de* $E \setminus \{a\} = \{b,c,d,e\}$. *Il y'a donc autant de parties partout dense de* E *que de parties de l'ensemble* $E \setminus \{a\} = \{b,c,d,e\}$, *dit autrement, il y a autant de parties partout dense de* E *que d'élément dans* $\mathcal{P}(E \setminus \{a\})$ *et ce dernier est de cardinal* $2^4 = 16$. *Il existe donc seize parties partout dense dans* E.

On considère la partie $A = \{c,e\}$. *En vertu de ce qui précède, les fermés contenant* A *sont :*E, $\{b,c,d,e\}$ *et* $\{c,d,e\}$ *de sorte que* $\bar{A} = \{c,d,e\}$, $\mathring{A} = \emptyset$ *car il n'existe <u>aucun ouvert non vide</u> contenu dans* A. *On en déduit aussitôt :* $Fr(A) = \bar{A} \cap \left(\mathring{A}\right)^c = \bar{A} = \{c,d,e\}$ *;* $Ext(A) = (\bar{A})^c = \{c,d,e\}^c = \{a,b\}$ *; d'autre part, comme* $A' \subset \bar{A}$ *et que ni* ***c*** *ni* ***e*** *ne sont des points d'accumulation de* A *(Soit* $\mathcal{O} = \{a,c,d\}$ *alors* $\hat{\mathcal{O}} \cap A = \emptyset$ *; posons* $\mathcal{Q} = \{a,b,e\}$ *alors* $\hat{\mathcal{Q}} \cap A = \emptyset$*), on en déduit que* $A' = \{d\}$ *car les ouverts contenants* d *sont* E, $\{a,c,d\}$ *et* $\{a,b,c,d\}$ *dont les ouverts pointés correspondants rencontrent* A.

La topologie $\mathcal{T}_A$ *induite par* $\mathcal{T}$ *sur* A *est la topologie discrète.*

En effet, $\{c\} = A \cap \{a,c,d\}$ *et* $\{e\} = A \cap \{a,b,e\}$. *<u>Tous les points</u> de* A *étant des ouverts, la topologie induite* $\mathcal{T}_A$ *est bien la discrète.*

Soit $B = \{a,d\}$ *alors* $\mathring{B} = \{a\}$ *;* $\bar{B} = E$ *(par la question 2) ;* $A \cap B = \emptyset$ *donc* $\overline{A \cap B} = \emptyset$ *et* $\overbrace{A \cup B}^{\circ} = \overbrace{\{a,c,d,e\}}^{\circ} = \{a,c,d\}$. *Par ailleurs* $\mathring{A} \cup \mathring{B} = \mathring{B} = \{a\}$ *et* $\bar{A} \cap \bar{B} = \bar{A} = \{c,d,e\}$.

Conclusion *: les inclusions* $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ *et* $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overbrace{A \cup B}^{\circ}$ *peuvent être strictes.*

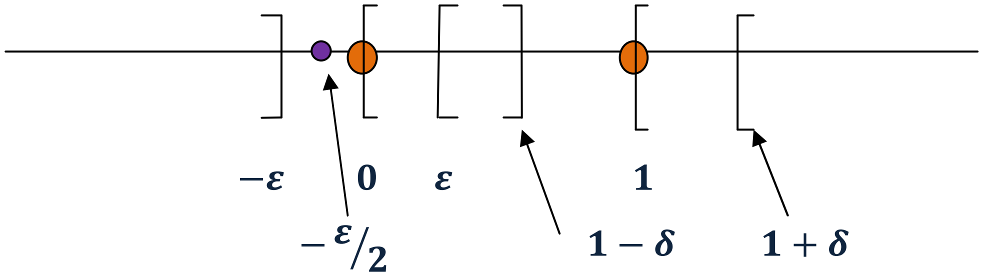
Exercice 3 *:*

Une partie $\mathcal{O}$ *de* $\mathbb{R}$ *est dite ouverte (pour la topologie usuelle) si :*

$$\text{Pour tout } x \in \mathcal{O}, \exists\, \varepsilon > 0 \text{ tel que }]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathcal{O}$$

L'intervalle $[0,1[$ *n'est ni un ouvert, ni un fermé de* $\mathbb{R}$.

- *Ce n'est pas un ouvert : car comme* $0 \in [0,1[$, *il existerait par définition, un réel* $\varepsilon > 0$ *tel que* $]-\varepsilon, \varepsilon[\subset [0,1[$ *ce qui est impossible car par exemple,* $-\varepsilon/2 \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, *mais* $-\varepsilon/2 \notin [0,1[$ *puisqu'il est strictement négatif (Cf. figure).*



- *Ce n'est pas un fermé : En effet,* 1 *est adhérent à* $[0,1[$ *alors que* $1 \notin [0,1[$. *Il reste donc à vérifier que* $1 \in \overline{[0,1[}$. *Soit* $\delta > 0$ *et considérons l'intervalle ouvert de centre* 1 *et de rayon* δ, *c'est-à-dire* $]1-\delta, 1+\delta[$, *il nous faut montrer que* $[0,1[\cap]1-\delta, 1+\delta[$ *est non vide (Cf. figure). Nous allons, pour des raisons de commodité distinguer trois cas :*
  1. *i.* $1-\delta < 0$ *i.e.* $\delta > 1$ *alors* $[0,1[\cap]1-\delta, 1+\delta[= [0,1[\neq \emptyset$.
  2. *ii.* $1-\delta = 0$ *i.e.* $\delta = 1$ *alors* $[0,1[\cap]1-\delta, 1+\delta[= [0,1[\cap]0,2[=]0,1[\neq \emptyset$.
  3. *iii.* $1-\delta > 0$ *i.e.* $\delta < 1$ *alors* $[0,1[\cap]1-\delta, 1+\delta[=]1-\delta, 1[\neq \emptyset$.

L'intervalle ouvert $]0,1[$ *est un ouvert (c'est la boule ouverte, pour la distance usuelle définie par la valeur absolue, de centre* $\frac{1}{2}$ *et de rayon* $\frac{1}{2}$*) et* $]0,1[\subset [0,1[$ *donc* $]0,1[\subset \overset{\circ}{\overbrace{[0,1[}}$, *comme on vient de voir que* $0 \notin \overbrace{[0,1[}$, *il en résulte que* $\overset{\circ}{\overbrace{[0,1[}} =]0,1[$. *De même, comme* $[0,1]$ *est fermé (car son complémentaire est un ouvert, ou bien parce que c'est le boule fermé de centre* $\frac{1}{2}$ *et de rayon* $\frac{1}{2}$*), de l'inclusion* $[0,1[\subset [0,1]$, *on en déduit que* $\overline{[0,1[} \subset [0,1]$, *mais on vient de voir* $1 \in \overline{[0,1[}$ *donc* $\overline{[0,1[} = [0,1]$.

On en déduit aussitôt :

$$Fr([0,1[) = \overline{[0,1[} \cap \left(\overbrace{[0,1[}^{\circ}\right)^{c} = [0,1] \cap]0,1[^{c} = [0,1] \cap (]-\infty,0] \cup [1,+\infty[) = \{0,1\}$$

$$Ext([0,1[) = ([\overline{0,1}[)^{c} = [0,1]^{c} =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$$

Exercice 4 *: Vérifions les axiomes d'une topologie.*

i. $\emptyset \in \mathcal{T}$ *par hypothèse et* $\mathbb{N} \in \mathcal{T}$ *car* $\mathbb{N} = E_0$.

ii. Soient $\mathcal{O}$ *et* $\mathcal{Q}$ *deux éléments de* $\mathcal{T}$*, montrons que* $\mathcal{O} \cap \mathcal{Q} \in \mathcal{T}$*. En effet, si l'un d'eux est vide, l'intersection est aussi vide et le vide est dans* $\mathcal{T}$*. Supposons donc* $\mathcal{O}$ *et* $\mathcal{Q}$ *sont non vides, mais alors il va exister deux naturels* m *et* n *tels que* $\mathcal{O} = E_m$ *et* $\mathcal{Q} = E_n$ *alors* $\mathcal{O} \cap \mathcal{Q} = E_m \cap E_n = E_k \in \mathcal{T}$ *où* $k = \mathcal{M}ax\{m,n\}$.

iii. Soit $\mathcal{O}_{i\in I}$ *une famille d'éléments de* $\mathcal{T}$*, montrons que* $\mathcal{O} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i \in \mathcal{T}$*. On peut supposer que l'ensemble des indices* I *est non vide, sinon la réunion est alors par convention vide qui appartient à* $\mathcal{T}$*. Vu que le vide ne modifie pas une réunion, on peut supposer qu'aucun des* $\mathcal{O}_i$ *n'est égal au vide. Il existe donc pour chaque* $i \in I$*, un naturel* n_i *tel que* $\mathcal{O}_i = E_{n_i}$*, mais alors* $\mathcal{O} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i\in I} E_{n_i}$*. Posons* $\mathfrak{F} \overset{\text{def}}{=} \{n_i, i \in I\}$*.* $\mathfrak{F}$ *est une partie non vide (car* I *est non vide) de* $\mathbb{N}$*, elle admet par conséquent un plus petit élément* n_j *où* $j \in I$*. Montrons que* $\mathcal{O} = E_{n_j} \in \mathcal{T}$*. Soit* i *arbitrire dans* I*. Comme* $n_j \leq n_i$ *alors* $E_{n_i} \subset E_{n_j}$*, i.e.* $\mathcal{O} \subset E_{n_j}$*. L'autre inclusion est trivial car* E_{n_j} *est l'un des* E_{n_i} *!*

Coclusion : $\mathcal{T}$ *est bien une topologie sur* $\mathbb{N}$.

Soient $\mathcal{O}$ *et* $\mathcal{Q}$ *deux ouverts de* $\mathbb{N}$*, si l'un d'eux est vide par exemple* $\mathcal{O}$*, on a bien* $\mathcal{O} \subset \mathcal{Q}$*. Supposons tout non vides, ils sont alors du type* $\mathcal{O} = E_n$ *et* $\mathcal{Q} = E_m$ *où* m *et* n *sont deux entiers naturels. Si* $n \leq m$ *alors* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{O}$ *sinon, i.e. si* $n > m$ *alors c'est* $\mathcal{O}$ *qui sera contenu dans* $\mathcal{Q}$*. Finalement on vient de montrer ceci : quelque soit les ouverts* $\mathcal{O}$ *et* $\mathcal{Q}$ *de* $\mathbb{N}$*, l'un est contenu dans l'autre, cela signifie que la famille des ouverts, c'est-à-dire* $\mathcal{T}$ *est totalement ordonnée par inclusion.*

Il en résulte que $\mathcal{T}$ *est non séparée. En effet sinon, cela signifierait que <u>pour tout couple de points distincts</u>* m *et* n*, il va exister deux ouverts* $\mathcal{O}_n$ *et* $\mathcal{O}_m$ *contenant respectivement* n *et* m *et tels que* $\mathcal{O}_n \cap \mathcal{O}_m = \emptyset$*, mais ceci est absurde, puisque d'après ce qui précède,* $\mathcal{O}_n \cap \mathcal{O}_m = \mathcal{O}_n$ *ou* $\mathcal{O}_m$ *qui est non vide.*

Si l'appliction identité $id_{\mathbb{N}}: (\mathbb{N}, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{N}, \mathcal{T}_d)$ *était continue, cela signifierait que* $\forall\, \mathcal{O} \in \mathcal{T}_d,\ {id_{\mathbb{N}}}^{-1}(\mathcal{O}) = id_{\mathbb{N}}(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$ *appartiendrait à* $\mathcal{T}$*, c'est-à-dire que* $\mathcal{T}$ *serait égale à* $\mathcal{T}_d$ *et serait en particulier séparée, ce qui n'est pas. Il est ainsi prouvé que l'application précédente n'est pas continue.*

Exercice 5 *: Il existe plusieurs définitions équivalentes de la connexité, en voici deux :*

Un espace topologique $(F, \mathcal{T}')$ *est dit connexe si*

1. *Les seules parties de* F *à la fois ouvertes et fermés sont* F *et le vide.*
2. *Il n'existe pas de partitions de* F *en deux ouverts non vides.*

L'espace topologique défini dans l'exercice 2 est connexe. Pour le voir, nous allons utiliser la définition 1 de la connexité.

La famille des ouverts de E *est* $\boldsymbol{\mathcal{T}} = \big\{\boldsymbol{E}, \emptyset, \{\boldsymbol{a}\}, \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}, \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}, \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}, \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}\}\big\}$ *et nous avions déterminé la famille* $\mathcal{F}$ *des fermés de* E *:*

$$\boldsymbol{\mathcal{F}} = \big\{\boldsymbol{E}, \emptyset, \{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}\}, \{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}\}, \{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{e}\}, \{\boldsymbol{e}\}, \{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}\big\}$$

En examinant ces deux familles, on voit que les seules parties à la fois ouvertes et fermés sont E *et le vide, par conséquent* E *est connexe.*

Ouf !